SATBAYEV UNIVERSITY
Computing & Engineering
Volume 2 (2024), Issue 1, 32-39

https://doi.org/10.51301/ce.2024.i1.06

About a mathematical predator-prey model, with intraspecific competition

Zh.N. Seitkulova*, A. Sakabekov, G.A. Tulesheva, K.J. Murzassaimova, M.D. Naukenova
Satbayev University, Almaty, Kazakhstan
**Corresponding author: zh.seitkulova@satbayev.university*

Abstract. This article is a continuation of the study of the predator-prey system and the Ferhulst equation, considered in our previous works. In this work, we considered one of the many disadvantages of the basic predator-prey system, namely, we considered the fact that with zero initial values of the predator, the number of prey populations should not grow all the time, because such growth is not observed in real situations, since food reserves are not infinite and the habitats of any populations are limited. The same restrictions, therefore, must be considered for predators. Therefore, in order to consider, the limited food reserves and the limited habitat, we introduce terms from the Ferhulst model $-cx^2$, $-ry^2$ into the system of equations. They will consider the lack of food and habitat in the predator-prey model. We also give practical advice on how to distinguish the basic model from the model with intraspecific competition in real conditions. In this paper, solutions of a non-zero stationary state are considered. Depending on the parameters of the equations, the system has a special point, a stable focus or a stable node. Here we examine only the steady focus state. Next, we show how to determine the parameters of the predator-prey system with intraspecific competition based on statistical data, without analyzing the reserves of the food base for the victim, which significantly reduces the cost of research. A partial solution and a phase portrait of this system were obtained on Phyton. We think that our practical advice will be useful for controlling the number of some pests of agricultural crops.

Keywords: *predator-prey model, intraspecific competition, sustained focus, pest population control, resource constraints, search for system parameters.*

1. Введение

Модель Вольтерра-Лотки, хотя и является классической для понимания динамики популяций хищников и жертв, имеет ряд ограничений, особенно при учете ограниченности пищевой базы и среды обитания. Модель не учитывает, что количество пищи для жертв ограничено, что в реальности приводит к конкуренции между жертвами за ресурсы. В модели отсутствует механизм насыщения хищников, когда при определенной плотности популяции жертв эффективность поиска пищи хищниками уменьшается. Модель не учитывает ограничения среды обитания, которые могут влиять на встречаемость хищников и жертв [1]. Отсутствует учет изменчивости среды обитания, которая может влиять на доступность ресурсов и условия жизни видов. Модель не включает сезонные колебания в доступности ресурсов и условиях среды, которые могут критически влиять на популяционные процессы. И наконец модель игнорирует внутривидовую конкуренцию, которая может существенно влиять на динамику популяций, особенно в условиях ограниченных ресурсов.

В [1] даны фундаментальные исследования в области математической биологии и экологии, акцентируя внимание на взаимодействиях между различными видами популяций. Автор детально рассматривает модели, которые описывают динамику популяций, уделяя особое внимание нелинейным аспектам этих взаимодействий. В книге представлены различные математические методы и подходы к анализу сложных динамических систем, что делает ее ценным ресурсом для исследования и применения в практических целях. Основной упор в книге сделан на изучение устойчивости и бифуркаций, а также на анализ циклов и хаотическое поведения в системах взаимодействующих популяций. Автор использует примеры из реальной экологической практики, чтобы иллюстрировать теоретические концепции.

Учебное пособие [2] является важным вкладом в область биоматематики, представляя читателям глубокое понимание использования математических методов для анализа и моделирования сложных биологических систем. Автор детально рассматривает различные аспекты математического моделирования, начиная от базовых принципов и заканчивая сложными моделями, способными описывать динамику биологических процессов. Автор также обсуждает современные компьютерные технологии и программное обеспечение, используемые в математическом моделировании, что делает книгу актуальной и в контексте развития информационных технологий.

Работа [3] является классическим трудом в области математической экологии и биологии, заложившим основы теории динамики популяций и взаимодействия между видами. Вольтерра исследовал динамические системы, описывающие взаимодействия хищник-жертва, что позволило глубже понять механизмы, управляющие численностью популяций в природе. В своей работе Вольтерра разработал ряд уравнений, известных сегодня как уравнения Лотки-Вольтерры, которые моделируют динамику двух взаимосвязанных популяций, показывая, как их численность изменяется со временем в зависимости от взаимодействия между ними. Эти уравнения стали фундаментом для развития теоретической экологии и математической биологии.

В монографии [4] подчеркивается, что разработка методов защиты урожая от вредителей, естественно, требует прогноза динамики биологических популяций, сообществ и экосистем при тех или иных антропогенных воздействиях. При этом эксперименты на реальных системах весьма дороги, продолжительны и часто не допустимы, поэтому возникает необходимость разработки различного рода математических моделей. Монография посвящена разработке моделей и методов исследования задач защиты планируемого урожая сельскохозяйственной культуры.

В [5] рассматривается осознание необходимости сокращения использования химических пестицидов для борьбы с вредителями чайных плантаций. Хищники - полезные насекомые, питающиеся вредными насекомыми и клещами, которые несут значительные потери в производстве чая. В этой статье рассмотрели модель, состоящую из чайного растения, вредителя и хищника, при различных полевых условиях. Динамическое поведение изучается как аналитически, так и численно с помощью компьютерного моделирования. Их результаты предлагают некоторые теоретические меры, которые могут быть реализованы для успешного биологического контроля.

В [6] улучшают предположение о модели хищник-добыча со стадийной структурой для популяции хищников, что каждый отдельный хищник имеет одинаковую способность захватывать добычу. Предполагается, что незрелые и зрелые особи популяции хищника разделены фиксированным возрастом, а незрелая популяция хищника не имеет возможности добыть пищу. Получены достаточные условия, гарантирующие глобальную привлекательность периодического решения. Их результаты показывают, что поведение жертвы играет важную роль для постоянства системы и обеспечивает тактическую основу для управления биологическими ресурсами.

Постановка проблемы. Практика показывает, необходимость применения более реалистичных моделей для анализа динамики популяции в условиях реальной системы. В этой статье, во-первых, мы хотели дать свои практические рекомендации, как разобраться в выборе модификаций для описания взаимодействия хищников и жертв. Для примера взяли базовую модель Вольтерра-Лотки [7].

$$\begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -dy + kxy \end{cases}$$

и модель Вольтерра-Лотки, с внутривидовой конкуренцией [8].

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - cx^2 \\ y' = -dy + kxy - ry^2 \end{cases}$$

Во-вторых, хотим показать, как можно находить коэффициенты для модели хищник-жертва, с внутривидовой конкуренцией. Поиск параметров для базовой модели рассмотрена в работе [7].

Сначала, решим первую проблему. Будем разбираться с данными таблиц 1 и 2.

Пусть есть некоторая статистика численности хищников и жертв в двух разных средах обитания. Сбор статистических данных не обязательно должен проводиться за равные промежутки времени, но исследования, должны вестись на протяжении длительного времени. Такая статистика представляет собой ценные данные, которые обеспечат более точный выбор модели о взаимодействии между хищниками и их добычей в природной среде. Пусть, одна среда описывается базовой моделью Вольтерра-Лотки, а другая моделью Вольтерра-Лотки, с внутривидовой конкуренцией. Требуется из статистических данных таблиц 1 и 2 выбрать модификацию модели для (у) хищников и (х) жертв с внутривидовой конкуренцией.

Таблица 1. Статистические данные

t	x	y
0	3	1
0.18	3.724	1.287
0.72	1.993	2,.611
1.02	1.041	2.194
1.38	0.855	1.466
1.47	0.896	1.323
1.77	1.272	0.991
1.86	1.471	0.936
1.98	1.812	0.895
2.07	2.13	0.893
2.16	2.496	0.918
2.22	2.761	0.954
2.25	2.898	0.978

Таблица 2. Статистические данные

t	x	y
0	0.9	0.1
0.21	0.765	0.125
0.45	0.61	0.134
0.63	0.527	0.127
0.81	0.477	0.113
1.11	0.451	0.089
1.38	0.474	0.072
1.56	0.506	0.064
1.77	0.554	0.058
2.07	0.631	0.057
2.25	0.673	0.059
2.55	0.721	0.067
2.7	0.728	0.073
2.97	0.712	0.085

После выбора модификации модели хищник-жертва, разберёмся со второй проблемой. Найдем для модели хищник-жертва с внутривидовой конкуренцией параметры системы, такие как:

a-коэффициент, естественного прироста жертвы при отсутствии хищника.

b-коэффициент, характеризующий изменения убыли жертвы за счет взаимодействия с хищником.

c-коэффициент, который учитывает уровень конкуренции между жертвами за ограниченные ресурсы, такие как пища или территория.

d-коэффициент, естественной убыли хищника, при отсутствии жертвы.

k-коэффициент, характеризующий изменения прироста хищника за счет взаимодействия с жертвой.

r-коэффициент, который учитывает уровень конкуренции между хищниками за поедание жертвы или территории обитания.

И ответим на вопрос: «Какие дополнительные исследования нужны, для того чтобы найти эти коэффициенты?».

2. Методы и материалы

Для того чтобы по статистическим данным таблиц 1 и 2 выбрать модель хищник-жертва с внутривидовой конкуренцией, проведем качественный анализ базовой модели хищник-жертва и модели хищник-жертва с внутривидовой конкуренцией. Анализы и расчеты проведем с использованием языка программирования Python и программы Excel для работы с электронными таблицами. Использование этих программ в исследовании наших систем дает ряд преимуществ и полезных инструментов, облегчающих анализ статистических данных, математическое моделирование и визуализацию полученных результатов. Python обладает большим набором библиотек и инструментов для научных вычислений, также дает возможность использовать различные библиотеки, такие как Matplotlib, NumPy и SciPy, для обработки статистических данных и заканчивая математическим моделированием. Эти программы помогают строить качественные графики, поддерживают высокоуровневые математические функции в научных инженерных расчетах. Python позволяет автоматизировать рутинные вычисления, создавать коды для обработки статистических данных и повторяемых вычислений, которая сокращает время исследования. Благодаря Искусственному интеллекту можем использовать множество бесплатных кодов и библиотек, которые облегчают рутинные вычисления в нашей работе. А именно используем ИИ, при поиске коэффициентов в правой части нашей системы. Наличие огромного количества свободно распространяемых библиотек, позволило нам, комбинировать их между собой, в результате которой мы смогли определить модификацию наших моделей, по статистическим данных таблиц 1 и 2. Сначала, используя возможности Python получим математические модели наших двух моделей. Рассмотрим решение задачи Коши для базовой модели. Для определенности можем взять систему:

$$\begin{cases} x' = 4x - 2.5xy \\ y' = -2y + xy \end{cases}$$

С начальными условиями $x_o=1$, $y_o=2$.

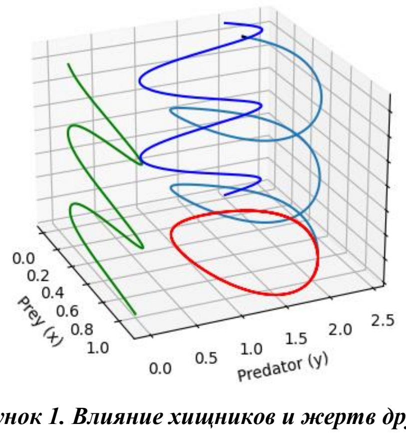

Рисунок 1. Влияние хищников и жертв друг на друга

На рисунке 1, полученной на Python, видим хищники и жертвы оказывают серьезное влияние друг на друга. Прирост численности жертв сокращается, причем тем больше, чем выше число хищников. Это объясняется легко, чем большее количество хищников, тем быстрее поедается жертва. С другой стороны, прирост хищников должен возрасти быстрее, чем выше численность жертв, поскольку в этих условиях большее число хищников будет обеспечено пищей. Рисунок 1 дает полную картину этой модели, так как она связывает все важные исследования системы, а именно, видим в пространстве (t, x, y) интегральную кривую в виде голубой спирали. На плоскости (t, x) –зеленой линией нарисована проекция интегральной кривой, как видно из рисунка 1 она периодическая, ее также можно называть кинетической кривой поведения жертвы, а на плоскости (t, y) - нарисована темно синей линией проекция интегральной кривой, она тоже периодическая функция, которую еще называют кинетической кривой поведения хищника. На плоскости (x, y) красной замкнутой линией, нарисована фазовая траектория интегральной кривой. Тот факт, что фазовая траектория является замкнутой линией, будем использовать в дальнейшем для определения модификаций модели хищник-жертва. Как известно, такие замкнутые линии называются центром. Главная особенность этой системы хищник-жертва, наличие колебания численностей и хищников и жертв. Ее обычно называют эталонной или базовой моделью, описывающей изменение численностей хищников и их жертв, вследствие их взаимодействия. Нулевую точку покоя в этой работе не рассматриваем. Фазовая траектория рассмотрена только для x>0, y>0. А полный фазовый портрет можно показать через сферу Пуанкаре, но так как мы работаем с популяцией, с живыми системами, то достаточно рассмотреть точки покоя при x>0, y>0, что мы и сделаем. Несмотря на то, что эту модель называют базовой или классической, как мы отметили во введении, у нее есть ряд недостатков. Такие как: изменение климата, доступность ресурсов, конкуренцию за ресурсы, влияние человеческой деятельности, эволюционные изменения и т.д. Поэтому при решение практических задач при моделировании нужно выяснить можно ли описать ее базовой моделью или как понять какой модификацией ее описать? И какой аппарат математики поможет определить модификацию? Какие нужны данные для того, чтобы правильно выбрать ее? На сегодняшний день уже известны более 100 модификаций этой модели. Но это еще не говорит, что эти модели полностью могут описать существующие на земле отношения хищников и жертв.

Теперь детально рассмотрим вторую систему: для определенности возьмем

$$\begin{cases} x' = 2x - 17xy - x^2 \\ y' = -3y + 5xy - y^2 \end{cases}$$

с начальными условиями $x_o=0.5$, $y_o=0.1$.

Эта модель отличается от базовой модели, появились дополнительные члены $-x^2$, $-y^2$. Эти члены взяты из модели Ферхюльста, они отражают тот факт, что пищевые запасы и ареалы существования для хищников и их жертв ограничены. Качественное исследования, этой системы можно встретить в работах [1], [2]. Известно, что эта система имеет два стационарных решения. Первое стационарное решение нулевое, а второе ненулевое. В этой статье будем рассматривать только ненулевое решение. Система в ненулевой точке покоя имеет особую точку- устойчивый фокус. Но если взять другие параметры системы, то точка покоя может оказаться устойчивым узлом. В данной работе мы взяли систему, с точкой покоя устойчивый фокус, а устойчивый узел в этой статье не рассматриваем. В стационарной точке устойчивый фокус состояние системы асимптотически устойчиво. Это объясняется наличием членов $-x^2$, $-y^2$, они указывают на то, что чем больше численность хищников и жертв, тем больше внутривидовой конкуренции. Таким образом, эти члены приводят к устойчивости их численности. Теперь на Python получим полную математическую модель хищник-жертва с внутривидовой конкуренцией, которую в дальнейшем будем использовать для поиска модификаций модели хищник-жертва таблиц 1 и 2.

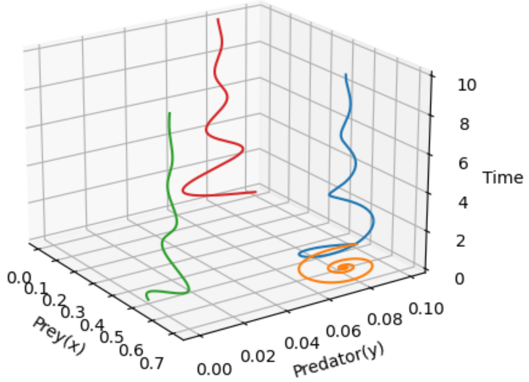

Рисунок 2. Влияние хищников и жертв друг на друга в модифицированной системе

На рисунке 2, полученной на Python, видим, как хищники и жертвы оказывают серьезное влияние друг на друга в модифицированной системе. Прирост численности жертв сокращается как в базовой модели, причем тем больше, чем выше число хищников. Это объясняется легко, чем большее количество хищников, тем быстрее поедается жертва. С другой стороны, прирост хищников должен возрасти быстрее, чем выше численность жертв, поскольку в этих условиях большее число хищников будет обеспечено пищей. Рисунок 2 дает полную картину этой модели, так как связывает все важные компоненты системы, а именно: В пространстве (t,x,y) получена интегральная кривая в виде голубой спирали, которая с течением времени переходит в прямую линию, так как члены-x^2, $-y^2$ стабилизируют численность обоих видов. На плоскости (t, x) –зеленой линией нарисована проекция интегральной кривой, как видно из рисунка 1, она тоже с течением времени переходит в прямую, ее еще можно называть кинетической кривой поведения жертвы, а на плоскости (t, y) - нарисована красной линией проекция интегральной кривой, она тоже с течением времени переходит в прямую, которую еще можно называть кинетической кривой поведения хищника. На плоскости (x, y) оранжевой спиральной линией, нарисована фазовая траектория интегральной кривой, которую называют устойчивым фокусом. Тот факт, что фазовая траектория является закручивающейся внутрь линией, будем использовать в дальнейшем для определения модификаций модели хищник-жертва. Наш поиск модификаций модели хищник-жертва, не претендует на единственно верный подход к решению проблемы, можно и через кинетические кривые разобраться в модификациях модели, но в этом случае промежуток времени для исследования, потребуется гораздо больше, что может затянуть научное исследование и увеличить затраты на поиск решения требуемой задачи.

Решение.

1. Поиск модификаций модели хищник жертва.

Как известно, описание математической модели о процессах в живых системах представляет большие трудности, особенно связанные с анализом двувидовых экосистем. Но аппарат обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно знание элементов теории устойчивости, позволит нам выявить по табличным данным модификацию модели хищник-жертва, с внутривидовой конкуренцией. Для этого исследуем фазовые портреты этих 2 систем.

По данным таблицы 1, получим кинетические кривые (рисунок 3).

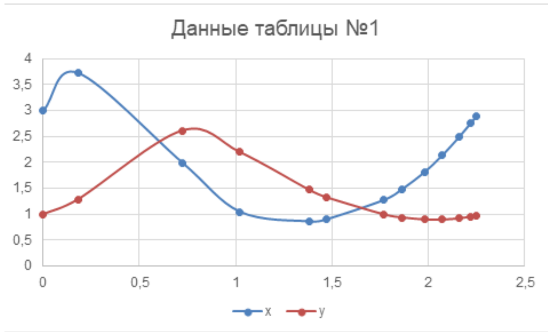

Рисунок 3. Данные из таблицы 1

По данным таблицы 2, получим рисунок 4.

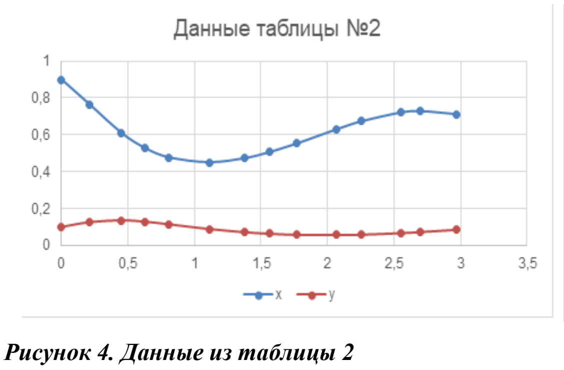

Рисунок 4. Данные из таблицы 2

На рисунках 3 и 4 видим периодичность решения, но принять решение, какая из них модель Вольтерра-Лотки с внутривидовой конкуренцией затруднительно. Но, если все же хочется определить модификацию модели хищник-жертва только через кинетические кривые, то нужно еще некоторое время собирать статистику численностей обоих популяций. Обоснуем наши рекомендации: на рисунках 3 и 4 все кривые периодические, заметить, что на рисунке 4 амплитуда уменьшилась трудно. Поэтому однозначно сказать какой модификацией она описывается затруднительно. Но построив фазовую траекторию обоих данных таблиц 1 и 2, сразу видно их разница.

По таблице 1 получаем фазовую траекторию, как на рисунке 5.

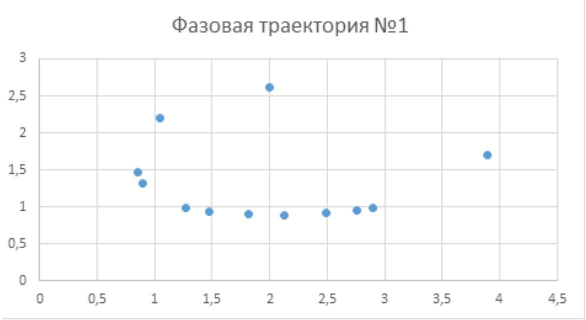

Рисунок 5. Фазовая траектория из таблицы 1

По рисунку 5, можно предположить, что данные таблицы 1 соответствуют базовой модели Вольтерра-Лотки.

По таблице 2 получаем фазовую траекторию, как на рисунке 6.

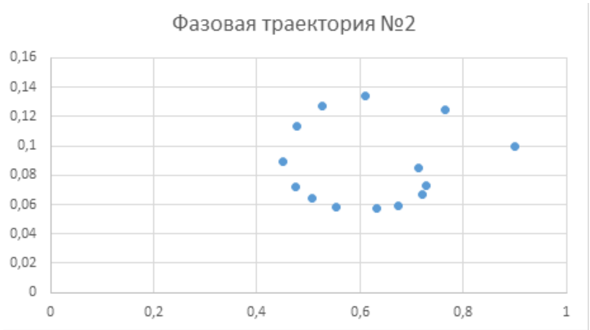

Рисунок 6. Фазовая траектория из таблицы 2

По рисунку 6, с большой уверенностью можно предположить, что данные таблицы 2 соответствуют модели Вольтерра-Лотки с внутривидовой конкуренцией, потому что она имеет форму внутрь закручивающейся спирали и ее форма напоминает устойчивый фокус. Видим, что качественные исследования решения, дают больше информации о модели, чем исследование кинетических кривых хищников и их жертв. И еще следует отметить нет необходимости сбора статистики через одинаковые промежутки времени. Этот пункт будет очень полезным при практическом применении этого способа определения модификаций модели, так, как например, при холодных и дождливых погодных условиях можно будет пропустить очередной сбор статистики численностей обоих видов, что делают исследования более удобными. Таким образом, определили, что данные второй таблицы можно принять за точки решения уравнения хищник-жертва с внутривидовой конкуренцией. Первая часть нашей задачи решена. Следует оговориться, что данные таблицы были достоверно известны, что одна из ник получена из базовой модели, а другая из модифицированной системы, с внутривидовой конкуренцией. Поэтому мы пишем с большой уверенностью о том, что данные таблицы 2, являются точками решения системы Вольтерра-Лотки, с внутривидовой конкуренцией. Но если это было бы не оговорено, то для поиска модификаций сравнение фазовых траекторий было бы недостаточно. Обоснуем наши рекомендации: по наличию одной замкнутой линии, которая является фазовой траекторией интегральной кривой, нельзя сказать, что все остальные фазовые траектории будут замкнутыми. Потому что она может оказаться предельным циклом. В этих случаях рекомендуем менять начальные условия задачи и получить несколько фазовых траекторий, о есть получить фазовый портрет системы и лишь потом делать выводы какой модификации она соответствует.

2. Поиск параметров системы хищник-жертва, с внутривидовой конкуренцией

Теперь будем искать параметры этой системы. Как показали, она описывается системой.

$$\begin{cases} x' = ax - bxy - cx^2 \\ y' = -dy + kxy - ry^2 \end{cases}$$

Для поиска параметров a и c этой системы исследуем статистику численностей жертв нескольких измерений, собранных за очень короткое время, на каком-нибудь экспериментальном участке без хищников с одинаковым интервалом времени. И опять достаточно нескольких измерений, и выбор начало времени измерения тоже остается за нами, что тоже облегчают способы поиска сбора статистики.

Данные занесем в таблицу 3.

Таблица 3. Статистика численностей жертв нескольких измерений

t	xi	xi+1	Δx	≈x'	x'/x	xi
0.0000	1.5000	1.5022	0.002247	0.7489	0.4992	1.5000
0.0030	1.5022	1.5045	0.002240	0.7466	0.4970	1.5022
0.0060	1.5045	1.5067	0.002233	0.7444	0.4948	1.5045
0.0090	1.5067	1.5089	0.002226	0.7421	0.4925	1.5067
0.0120	1.5089	1.5112	0.002220	0.7398	0.4903	1.5089
0.0150	1.5112	1.5134	0.002213	0.7376	0.4881	1.5112
0.0180	1.5134	1.5156	0.002206	0.7353	0.4859	1.5134
0.0210	1.5156	1.5178	0.002199	0.7330	0.4837	1.5156
0.0240	1.5178	1.5200	0.002192	0.7308	0.4815	1.5178
0.0270	1.5200	1.5222	0.002185	0.7285	0.4793	1.5200
0.0300	1.5222	1.5243	0.002179	0.7262	0.4771	1.5222
0.0330	1.5243	1.5265	0.002172	0.7239	0.4749	1.5243

По двум последним столбцам таблицы 3, методом наименьших квадратов найдем уравнение прямой (рисунок 7), где за y взяли x'/x.

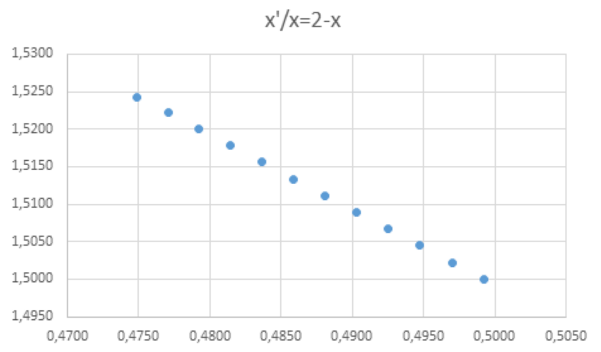

Рисунок 7. Уравнение прямой методом наименьших квадратов

Уравнение прямой будет иметь вид: $x'/x = 2 - x$, отсюда находим a=2, c=1.

Для поиска параметров d и r этой системы исследуем статистику численностей хищников нескольких измерений, собранных за очень короткое время, без жертв, точно такими рассуждениями находим: $y'/y = -3 - y$, отсюда находим d=3, r=1.

Параметр b находим так: по кинетическим кривым рисунка 8. наблюдаем за численностью жертв, найдем момент времени, когда она достигнет максимуму или минимума. При t=1,8 получаем $x_{\max} = 0.7, y = 0.076$. Тогда получим простое алгебраическое уравнение

$$0 = 2*0.7 - b*0.7*0.076 - 0.49$$

$$b \approx 17$$

Параметр k находим так: наблюдаем за численностью хищников рисунок 8, найдем момент времени, когда она достигнет максимуму или минимума. При t=1.06 получаем $y_{\min} = 0.06, x = 0.61$. Тогда получим простое алгебраическое уравнение

$$0 = -3*0.06 + k*0.61*0.06 - 0.0036$$

$$k \approx 5$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} x' = 2x - 17xy - x^2 \\ y' = -3y + 5xy - y^2 \end{cases}$$

После выбора модификаций и найденных параметров, исследуем фазовые портреты системы, для эффективного управления численностью хищников и жертв. На Phyton получим решение (рисунок 8) и фазовый портрет системы (рисунок 9).

```
import numpy as np
from scipy. integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

 # create function
def f(y, t):
      y1, y2 = y
      return [2*y1-17*y2*y1-y1*y1, -3*y2+5*y2*y1-y2*y2]

t = np.linspace( 0, 15.5, 100) # vector of time
y0 = [0.5, 0.1] # start value
w = odeint(f, y0, t) # solve eq.
y1 = w[:,0]
y2 = w[:,1]
fig = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(t, y1, '-o', t, y2, '-o', linewidth=2)
plt.ylabel("z")
plt.xlabel("t")
plt.grid(True)
plt.show() # display

fig2 = plt.figure(facecolor='white')
plt.plot(y1, y2, linewidth=2)
plt.grid(True)
plt.show()
```

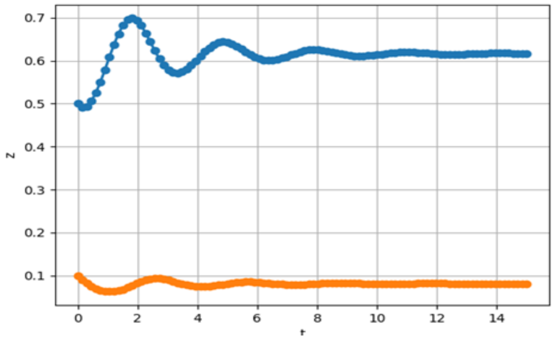

Рисунок 8. Решение системы

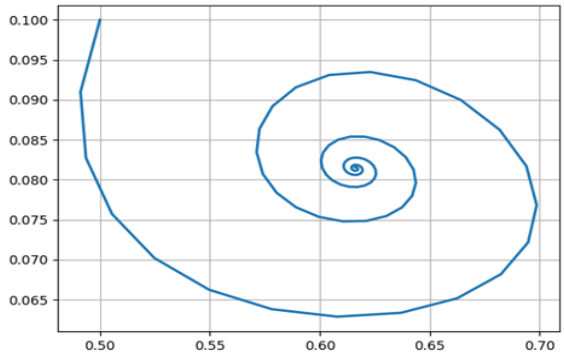

Рисунок 9. Фазовый портрет системы

3. Результаты и обсуждение

Таким образом данные таблицы 2 соответствуют модели хищник-жертва, с внутривидовой конкуренцией. И если ориентироваться на дополнительные исследования статистических данных, то наша модель будет иметь конкретный вид:

$$\begin{cases} x' = 2x - 17xy - x^2 \\ y' = -3y + 5xy - y^2 \end{cases}$$

Где:

a=2-коэффициент, естественного прироста жертвы при отсутствии хищника.

b=17-коэффициент, характеризующий изменения убыли жертвы за счет взаимодействия с хищником.

c=1-коэффициент, который учитывает уровень конкуренции между жертвами за ограниченные ресурсы, такие как пища или территория

d=3-коэффициент, естественной убыли хищника, при отсутствии жертвы.

k=5-коэффициент, характеризующий изменения прироста хищника за счет взаимодействия с жертвой.

r=1-коэффициент, который учитывает уровень конкуренции между хищниками за поедание жертвы или территории обитания.

Проведенный анализ на Python и Excel статистических данных нескольких измерений численности хищников и жертв показал, что в некоторых случаях можно определить модификацию модели хищник-жертва. Как только модификация определена, используя статистические методы, реализованные через Python и Excel, нашли параметры системы, но предварительно выполнив дополнительные исследования статистических данных, собранных за короткий и равный промежуток времени. Для определения параметров системы провели дополнительные исследования численности жертв без влияния хищников и численности хищников без влияния жертв. Понимание динамики взаимодействия хищников жертв могут быть использованы для контроля численности вредителей сельскохозяйственных культур. Вводя хищников вредителей в экосистему, можно управлять численностью вредителей, используя фазовый портрет системы. Тактика эффективного управления, описана в [7].

4. Выводы

Современное представление о живой природе находится в процессе становления. Еще никто не вывел математическую модель, описывающую полную картину мира, но уже можно сделать некоторые выводы:

Наши знания не всесильны, мы не можем полностью описать и предсказать полностью законы взаимодействия в живой природе. Все попытки человека изменить природу, приводят к системам, полезность которых ниже природной. Одно неправильное решение проблем, может привести к глобальным катастрофам. Все процессы в живой природе моделируются нелинейными уравнениями. Процессы роста хищников и их жертв могут стабилизироваться или перейти в колебательный режим. Поведение стационарного режима в системах, описывающих поведение участвующих популяций зависит от типа нелинейности, от коэффициентов системы, и от начальных условий. Но законы природы, которых можно описать нелинейными системами уравнений, с упрощенными допущениями очень удобны при научных исследованиях.

References / Литература

[1] Bazykin, A.D. (1985). Matematicheskaja biofizika vzaimodejstvujushhih populjacij. *M.: Nauka*

[2] Riznichenko, G.Ju. (2003). Matematicheskoe modelirovanie biologicheskih processov. Modeli v biofizike i jekologii. *M.: Izhevsk: In-t komp'juter.issled*

[3] Vol'terra, V. (1976). Matematicheskaja teorija bor'by za sushhestvovanie. *M.: Nauka*

[4] Odinaeva, R.N., Junusi, M.K. (2013). Issledovanie matematicheskoj modeli zadachi zashhity rastenij. *Dushanbe*

[5] Maitia, A., Pal, A.K. & Samantac, G.P. (2008). Usefulness of Biocontrol of Pests in Tea: A Mathematical Model. *Math. Model. Nat. Phenom., 3(4), 96-113*

[6] Jiao, Jian-jun, Chen, Lan-sun, Juan, J.Nieto, Torres, A. (2008). Permanence and global attractivity of stage-structured predator-prey model with continuous harvesting on predator and impulsive stocking on prey. *Appl. Math. Mech. -Engl. Ed., 29(5), 653-663*

[7] Sejtkulova, Zh.N., Kel'tenova, R.T., Murzasaimova, K.D., Tulesheva, G.A. (2023). Poisk parametrov i vybor modifi-kacij dlja modeli hishhnik-zhertva. *Nauchnye trudy VIIR-JeiS, 3(53), 151-159*

[8] Sejtkulova, Zh.N., Murzasaimova, K.D., Tulesheva, G.A. (2022). Ob odnoj troficheskoj modeli na statisticheskih dannyh odnoj pushnoj kompanii. *Trudy mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoj konferencii «Satpaevskie chtenija-2022. Trendy sovremennyh nauchnyh issledovanij», Almaty*

Ішкі бәсекелестігі бар жыртқыш-жемтіктің математикалық моделі туралы

Ж.Н. Сейткулова*, А. Сакабеков, Г.А. Тулешева, К.Д. Мурзасаимова, М.Д. Наукенова

Satbayev University, Алматы, Қазақстан

**Корреспонденция үшін автор: zh.seitkulova@satbayev.university*

Аңдатпа. Бұл мақала бұрынғы жұмыстарды қарастырылған жыртқыш-жемтік жүйесі мен Ферхульст теңдеуін зерттеудің жалғасы болып табылады. Бұл жұмыста жыртқыш-жемтік базалық жүйесінің көп кемшіліктерінің бірін қарастырдық, атап айтқанда жыртқыштың бастапқы нөлдік мәндерінде жемтіктердің популяциясының саны үнемі өспейтінін ескердік, өйткені мұндай өсу накты жағдайларда байқалмайды, себебі азық-түлік қоры шексіз емес және кез-келген популяцияның тіршілік ету ортасы шектеулі болады. Дәл осындай шектеулер жыртқыштар үшін ескерілуі керек. Сондықтан жем базасының және тіршілік ету ортасының шектеулілігін ескеру үшін теңдеулер жүйесіне Ферхюльст моделінің мүшелерін $-cx^2$, $-ry^2$ енгіземіз. Бұл мүшелер жыртқыштар мен жемтік моделінде азық-түлік қоры мен тіршілік ету ортасының шектеулігін ескереді. Сондай-ақ, нақты жағдайларда базалық модельді ішкі бәсекелестік моделінен қалай ажыратуға болатындығы туралы практикалық кеңестер береміз. Бұл жұмыста нөлдік емес стационарлық жағдайдағы шешімдер қаралды. Жүйенің параметрлеріне байланысты жүйенің ерекше нүктесі-тұрақты фокусы немесе тұрақты түйіні болады. Бұл жұмыста тек ерекше нүктені - орнықты фокусты зерттейміз. Одан әрі жемтіктің тамақ базасының қорларын талдамай-ақ статистикалық деректердің көмегімен ішкі бәсекелестігі бар жыртқыш-жемтік жүйесінің параметрлерін қалай анықтау керектігін көрсетеміз, бұл зерттеу шығындарын айтарлықтай азайтады. Phyton-да дербес шешім мен осы жүйенің фазалық портреті алынды. Біздің тәжірибелік кеңестеріміз ауыл шаруашылығында кейбір зиянкестердің санын бақылау үшін пайдалы болады деп ойлаймыз.

Негізгі сөздер: *жыртқыш-жемтік моделі, ішкі бәсекелестік, орнықты фокус, зиянкестер популяциясын бақылау, ресурстардың шектеулілігі, жүйе параметрлерін іздеу*.

О математической модели хищник-жертва, с внутривидовой конкуренцией

Ж.Н. Сейткулова*, А. Сакабеков, Г.А. Тулешева, К.Д. Мурзасаимова, М.Д. Наукенова

Satbayev University, Алматы, Казахстан
**Автор для корреспонденции: zh.seitkulova@satbayev.university*

Аннотация. Эта статья является продолжением исследования системы хищник-жертва и уравнения Ферхульста, рассмотренных в наших предыдущих работах. В этой работе рассмотрели один из многих недостатков базовой системы хищник-жертва, а именно учли тот факт, что при нулевых начальных значениях хищника численность популяции жертв не должно расти все время, потому что такой рост не наблюдается в реальных ситуациях, так как запасы пищи не бесконечны и ограничены места обитания любых популяций. Такие же ограничения, следовательно, нужно учесть для хищников. Поэтому, чтобы учесть ограниченность пищевых запасов и ограниченность среды обитания, в систему уравнений вводим члены из модели Ферхюльста $-cx^2$, $-ry^2$. Они в модели хищник-жертва будут учитывать недостаток пищи и среды обитания. Также даем практические советы, как в реальных условиях отличить базовую модель от модели с внутривидовой конкуренцией. В этой работе рассмотрены решения, ненулевого стационарного состояния. В зависимости от параметров уравнений система имеет особую точку устойчивый фокус или устойчивый узел. Здесь исследуем только состояние устойчивый фокус. Далее показываем, как на статистических данных определить параметры системы хищник-жертва с внутривидовой конкуренцией, не анализирую запасы пищевой базы для жертвы, что существенно снижает затраты на исследования. На Phyton получено частное решение и фазовый портрет этой системы. Думаем, что наши практические советы будут полезны для контроля численности некоторых вредителей сельскохозяйственных культур.

Ключевые слова: *модель хищник-жертва, внутривидовая конкуренция, устойчивый фокус, контроль популяции вредителей, ограниченность ресурсов, поиск параметров системы*.

Received: 21 December 2023
Accepted: 16 March 2024
Available online: 31 March 2024